ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
(ΘΕΜΑΤΑ Α, Β, Γ)

Α1.

Έστω f μια συναρτηση ορισμένη σε ενα διαστημα Δ. Αν F ειναι μια παραγουσα της f στο Δ, τοτε

- ολες οι συναρτησεις της μορφης

$$G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbf{R},$$

ειναι παραγουσες της f στο Δ και

- καθε αλλη παραγουσα G της f στο Δ παιρνει τη μορφη

$$G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbf{R}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Καθε συνάρτηση της μορφης $G(x) = F(x) + c$, οπου $c \in \mathbf{R}$, ειναι μια παραγουσα της f στο Δ, αφου

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για καθε } x \in \Delta$$

- Έστω G ειναι μια άλλη παραγουσα της f στο Δ. Τοτε για καθε $x \in \Delta$ ισχυουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οποτε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για καθε } x \in \Delta$$

Αρα, συμφωνα με το πόρισμα της § 2 6, υπαρχει σταθερα c τετοια, ωστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για καθε } x \in \Delta \ \blacksquare$$

Α2.

Έστω μια συναρτηση f, η οποια ειναι ορισμενη σε ένα κλειστο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f ειναι συνεχης στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τοτε, για καθέ αριθμό η μεταξυ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπαρχει ενας, τουλαχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τετοιος, ωστε

$$f(x_0) = \eta$$

Α3.

Αν ένα τουλάχιστον απο τα ορια $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ειναι $+\infty$ η $-\infty$, τοτε η ευθεια $x = x_0$ λέγεται **κατακορυφη ασύμπτωτη** της γραφικης παραστασης της f

Α4. ΣΩΣΤΟ / ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ / ΛΑΘΟΣ / ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3 \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

Β1 Αφού f παραγωγίσιμη (πολυωνυμική) με

$f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2\alpha x + 9$

κ' το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$

από Θ. Fermat πρέπει $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Rightarrow$

$2\alpha = -12 \Rightarrow \boxed{\alpha = -6}$

Για $\alpha = -6$ έχω $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Β2 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \overset{:3}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4$

$x = \dfrac{4 \pm 2}{2} \left\langle \begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \end{array} \right.$

x	$-\infty$ 1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
f	↗	↘	↗

x	$-\infty$ 1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
f	↗	↘	↗

Έστω $A_1 = (-\infty, 1)$

$A_2 = [1, 3]$

$A_3 = (3, +\infty)$

- $f(A_2) = f([1,3]) \overset{f \searrow}{=\!=} [f(3), f(1)] = [-3, 1]$

  Αφού $0 \in f([1,3])$ κ' $f \searrow$ στο $[1,3]$ υπάρχει

  1 μόνο ρίζα x_2 της $f(x) = 0$ στο $[1,3]$

• $f(A_3) = f((3,+\infty)) \xrightarrow{f \nearrow} \left(\lim\limits_{x\to 3^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-57, +\infty)$

Αφού $0 \in f(A_3)$ κ' $f \nearrow$ στο A_3 υπάρχει 1 μόνο ρίζα x_3 της $f(x)=0$ στο $A_3=(3,+\infty)$

• $f((0,1)) \xrightarrow{f \nearrow} \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-3, 1)$

Αφού $0 \in f((0,1))$ κ' $f \nearrow$ στο $(0,1)$ υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_1 \in (0,1)$ της εξίσωσης $f(x)=0$

Αφού $x_1 \in (0,1)$, $x_2 \in [1,3]$ κ' $x_3 \in (3,+\infty)$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 3 ακριβώς θετικές ρίζες

B3 $f''(x) = (3x^2-12x+9)' = 6x-12$

$f''(x)=0 \iff 6x-12=0 \iff x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f	∩		∪

f κοίλη (∩) στο $(-\infty, 2]$

f κυρτή (∪) στο $[2,+\infty)$

Σ.Κ. της C_f είναι το $\Sigma(2,f(2)) = \boxed{\Sigma(2,-1)}$

B4) Ισχύει $g(x) = x + f(x)$ ①, $x \in \mathbb{R}$ κ $g'(x) = 1 + f'(x)$ ②, $x \in \mathbb{R}$
ε_1 της C_f στο $A(7, f(7))$

$\varepsilon_1 : y - f(7) = f'(7)(x - 7)$ η $\varepsilon_1 : y = f'(7)x + f(7) - 7f'(7)$

ε_2 της C_g στο $B(7, g(7))$

$\varepsilon_2 : y - g(7) = g'(7)(x - 7)$ η $\varepsilon_2 : y = g'(7)x + g(7) - 7g'(7)$

Για σ τομής των ε1 κ ε2 προκύπτει

$f'(7)x + f(7) - 7f'(7) = g'(7)x + g(7) - 7g'(7) \Rightarrow$

$f'(7)x + f(7) - 7f'(7) = (1 + f'(7))x + 7 + f(7) - 7(1 + f'(7))$

$\cancel{f'(7)x} + \cancel{f(7)} - 7f'(7) = x + \cancel{f'(7)x} + \cancel{7} + \cancel{f(7)} - \cancel{7} - 7f'(7)$

$x = 0$

άρα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στον $y'y$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (e^x \cdot ημx) = e^0 \cdot ημ0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+x} = 0$

$f(0) = 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x \cdot ημx}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left[e^x \cdot \frac{ημx}{x}\right] = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} \overset{\substack{x\to 0^+ \\ |x|=x}}{=\!=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

Η f συνεχής στο $x_0 = 0$

Άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x \cdot ημx}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left[e^x \cdot \frac{ημx}{x}\right] = 0 \cdot 0 = 0 = λ$$

γιατί: $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$

$$\left|\frac{ημx}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| \iff -\left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{ημx}{x} \leq \left|\frac{1}{x}\right|$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-\left|\frac{1}{x}\right|\right) = 0 = \lim_{x\to -\infty}\left|\frac{1}{x}\right|$$

Από κρ. Παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{ημx}{x} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\cancel{\lambda}\cdot x] \overset{=0}{=} \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x \cdot \eta\mu x) = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

γιατί: $-1 \le \eta\mu x \le 1 \overset{\cdot e^x>0}{\iff} -e^x \le e^x \cdot \eta\mu x \le e^x$

$$\lim_{x\to-\infty}(-e^x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} e^x$$

Από κρ. Παρεμβολής: $\lim_{x\to-\infty}(e^x \cdot \eta\mu x) = 0$

Η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} \underset{|x|=x}{\overset{x\to+\infty}{=}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \sqrt{1+0} = 1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\cancel{\lambda}\cdot x] \overset{=1}{=} \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} \underset{|x|=x}{\overset{x\to+\infty}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2} = \beta \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Γ3. Έστω $g(x) = f(x) - \left(x+\frac{1}{2}\right) = e^x \cdot \eta\mu x - x - \frac{1}{2}$

• Η g συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών.

$$g(-\pi) = e^{-\pi}\cdot\cancel{\eta\mu(-\pi)} - (-\pi) - \frac{1}{2} = e^{-\pi} + \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = e^0\cdot\cancel{\eta\mu 0} - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

• $g(-\pi)\cdot g(0) < 0$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \iff f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi, 0)$.

Γ4. $y(t)=\sqrt{x^2(t)+x(t)}$, $x(t)\geq 0$ και $x'(t)>0$

$$y'(t)=\frac{2\cdot x(t)\cdot x'(t)+x'(t)}{2\cdot\sqrt{x^2(t)+x(t)}}$$

<u>Για $t=t_0$</u> : $y'(t_0)=\dfrac{2\cdot x(t_0)\cdot x'(t_0)+x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}}$ $\overset{(y'(t_0)=x'(t_0))}{\iff}$

$$x'(t_0)=\frac{x'(t_0)\cdot[2\cdot x(t_0)+1]}{2\cdot\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}} \quad \overset{:x'(t_0)>0}{\iff}$$

$$1=\frac{2\cdot x(t_0)+1}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}} \iff$$

$$2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}=2\cdot x(t_0)+1$$

Άρα $4\cdot[x^2(t_0)+x(t_0)]=[2\cdot x(t_0)+1]^2 \iff$

$$\cancel{4\cdot x^2(t_0)}+\cancel{4\cdot x(t_0)}=\cancel{4\cdot x^2(t_0)}+\cancel{4\cdot x(t_0)}+1 \iff$$

$0=1$ <u>Αδύνατο</u>

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0.