ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 5

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι "1-1", αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

γ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

δ) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{x \mid \eta\mu x=0\}$ και ισχύει $(\sigma\varphi x)'=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ \text{ με τύπο } f(x)=2\ln(x-1)$$

και

$$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R},\ \text{ με τύπο } g(x)=\sqrt{x-2}+1\,.$$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Μονάδες 8

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $h(x)=\ln(x-2),\ x\in(2,+\infty)$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h^{-1} (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$$

με $\kappa,\mu\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\kappa=0$ και

ii) $\mu=1$.

Μονάδες 8

Γ2. **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (μονάδες 3) και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 11

Γ3. Για $\nu \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx$.

i) Να αποδείξετε ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

ii) Να υπολογίσετε τα I_0, I_1 και I_2.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1,0)$ ώστε:

$$g(x_1)+x_1=0.$$

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(g(x)+x\right), & x\in(-\infty,0) \\ 2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x - \kappa x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$. **Μονάδες 2**

Δ3. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν:

i) $f(x) \geq 0$ και (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μια ρίζα, x_2. (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$. (μονάδες 3)

ii) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2)$, όπου x_1 είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και x_2 είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3.$$

(μονάδες 7)

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ