ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
(ΘΕΜΑΤΑ Α-Δ2)

ΘΕΜΑ Α

A1

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συναρτηση f ορισμενη σε ένα διαστημα Δ. Αν

- η f ειναι συνεχης στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για καθε *εσωτερικο* σημειο x του Δ,

τοτε η f ειναι σταθερη σε ολο το διαστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκει να αποδειξουμε οτι για οποιαδηποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχυει $f(x_1) = f(x_2)$. Πραγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τοτε προφανως $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τοτε στο διαστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιει τις υποθεσεις του θεωρηματος μέσης τιμης. Επομενως, υπαρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τετοιο, ωστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδη το ξ ειναι εσωτερικο σημειο του Δ, ισχυει $f'(\xi) = 0$, οποτε, λογω της (1), ειναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τοτε ομοιως αποδεικνυεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε ολες, λοιπον, τις περιπτωσεις ειναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

A2

Έστω οι συναρτησεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντα στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τοτε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

A3

Εστω f μια συναρτηση ορισμενη σε ενα διαστημα Δ. **Αρχικη συνάρτηση** η **παρά-γουσα της f στο Δ** ονομαζεται καθε συναρτηση F που ειναι παραγωγισιμη στο Δ και ισχυει

$$F'(x) = f(x), \text{ για καθε } x \in \Delta$$

A4

α → ΛΑΘΟΣ

β → ΣΩΣΤΟ

γ → ΣΩΣΤΟ

δ → ΣΩΣΤΟ

ε → ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=2\ln(x-1)$ $\qquad$ $g(x)=\sqrt{x-2}+1$

B1 $D_f=(1,+\infty)$ $\qquad$ $D_g=[2,+\infty)$

πρέπει $x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$

$x\in[2,+\infty)$ $\qquad$ $\sqrt{x-2}+1\in(1,+\infty)$

$\sqrt{x-2}+1>1$

$\sqrt{x-2}>0$

$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

άρα $\boxed{D_{f\circ g}=(2,+\infty)}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\ln(g(x)-1)=2\ln(\sqrt{x-2}+1-1)$

$(f\circ g)(x)=2\ln\sqrt{x-2}=2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}}=$

$2\frac{1}{2}\ln(x-2)$.

άρα $\boxed{(f\circ g)(x)=\ln(x-2), \text{ για } x>2}$

B2 Έχω $h(x)=\ln(x-2)$, $x>2$

$h'(x)=(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}>0 \quad \forall x>2$

Έτσι $h \nearrow$ άρα h 1-1 επομένως υπάρχει h^{-1}

$$D_{h^{-1}} = \Sigma T_h = h\left((2,+\infty)\right) \overset{h\nearrow}{=} \left(\lim_{x\to 2^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = \boxed{\mathbb{R}}$$

αφού

- $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) \underset{u_0=0}{\overset{u=x-2}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \ln u = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x-2) \underset{u_0=+\infty}{\overset{u=x-2}{=}} \lim\limits_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

Ισχύει $h(x)=y \iff x=h^{-1}(y)$

Έτσι, $h(x)=y$, με $y\in\mathbb{R}$

$\ln(x-2)=y$

$x-2=e^y$

$x=e^y+2, \quad y\in\mathbb{R}$

Επομένως $\boxed{h^{-1}(x)=e^x+2, \quad x\in\mathbb{R}}$

B3)

(*) $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2\ln(x-1)}{x-2} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\,\frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}h(x)\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = (-\infty)\cdot 2 = \boxed{-\infty}$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Γ}}$

Γ1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$

➔ Αφού f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R}$

Αν $\kappa\neq 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2}=\kappa(+\infty)=\pm\infty\notin\mathbb{R}$ άτοπο

πρέπει $\boxed{\kappa=0}$ έτσι $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$

έχουμε $f'(x)=\left(\dfrac{\mu x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{\mu(x^2+1)-\mu x(2x)}{(x^2+1)^2}=$

$=\dfrac{\mu x^2+\mu-2\mu x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-\mu x^2+\mu}{(x^2+1)^2}$

➔ Αφού $y=x$ εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$

πρέπει

• $f'(0)=1 \Rightarrow \dfrac{\mu}{1}=1 \Rightarrow \boxed{\mu=1}$

Γ2 Έχουμε $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

i) $$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\,2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \iff 1-x^2=0 \iff x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

• $x\in(-\infty,-1]$ ή $x\in[1,+\infty)$ $f \searrow$

$x\in[-1,1]$ $f \nearrow$

• στο $x_1=-1$ η ελάχιστο $f(-1)=-\frac{1}{2}$

στο $x_2=1$ η μέγιστο $f(1)=\frac{1}{2}$

ii) Έστω $\Delta_1=(-\infty,-1]$, $\Delta_2=(-1,1]$, $\Delta_3=(1,+\infty)$

• $f(\Delta_1)=f((-\infty,-1])\overset{f\searrow}{=}[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=[-\frac{1}{2},0)$

• $f(\Delta_2)=f((-1,1])\overset{f\nearrow}{=}(\lim\limits_{x\to-1^+}f(x),f(1)]=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$f(\Delta_3)=f((1,+\infty))\overset{f\searrow}{=}(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x))=(0,\frac{1}{2})$

Άρα Σ.Τ.f $= f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

iii) Εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

αφού $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

- $\alpha^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο Δ_1.

- $\alpha^2 + \frac{1}{2} \in f(\Delta_2)$ (για $\alpha = 0$) άρα η εξίσωση έχει 1 μόνο ρίζα στο Δ_2 την $x = 1$ (αφού $f \nearrow$ στο Δ_2)

- $\alpha^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_3)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο Δ_3

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχει 1 ΜΟΝΟ ρίζα την $x = 1$.

Γ3) $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$

i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}} dx$

$$\int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}} \qquad (1)$$

ii) • $I_0 \overset{\nu=0}{=\!=} \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx \underset{du=2x\,dx}{\overset{u=x^2+1}{=\!=\!=}} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{u}\,du$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$$

• $(1) \xrightarrow{\nu=0} I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\ln 2 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}}$$

• $(1) \xrightarrow{\nu=1} I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$I_2 = \frac{1}{4} - \overset{2}{\frac{1-\ln 2}{2}} \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{1-2+2\ln 2}{4}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{2\ln 2 - 1}{4}}$$

ΘΕΜΑ Δ

g παραγωγίσιμη, g' συνεχής

$0 < g(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Δ1 Θέτουμε $h(x) = g(x) + x$

η h συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών

$$\left.\begin{array}{l} h(-1) = g(-1) - 1 < 0 \\ h(0) = g(0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(-1)\,h(0) < 0$$

Από Θ. Bolzano $\exists\, x_1 \in (-1, 0)$ $h(x_1) = 0 \Rightarrow$

$$g(x_1) + x_1 = 0$$

(*) $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και συνεχής

Άρα η h' διατηρεί πρόσημο

Άρα η h γνησίως μονότονη,
Επομένως η ρίζα είναι μοναδική

Δ2

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \left(x(g(x) + x)\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right) = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Άρα $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \underline{\kappa = 3}$