ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συναρτηση f ορισμενη σε ένα διαστημα Δ. Αν

- η f ειναι συνεχης στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για καθε *εσωτερικο* σημειο x του Δ,

τοτε η f ειναι σταθερη σε ολο το διαστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκει να αποδειξουμε οτι για οποιαδηποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχυει $f(x_1) = f(x_2)$. Πραγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τοτε προφανως $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τοτε στο διαστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιει τις υποθεσεις του θεωρηματος μέσης τιμης. Επομενως, υπαρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τετοιο, ωστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδη το ξ ειναι εσωτερικο σημειο του Δ, ισχυει $f'(\xi) = 0$, οποτε, λογω της (1), ειναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τοτε ομοιως αποδεικνυεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε ολες, λοιπον, τις περιπτωσεις ειναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

A2

Έστω οι συναρτησεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντα στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τοτε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

A3

Εστω f μια συναρτηση ορισμενη σε ενα διαστημα Δ. **Αρχικη συνάρτηση** η **παράγουσα της f στο Δ** ονομαζεται καθε συναρτηση F που ειναι παραγωγισιμη στο Δ και ισχυει

$$F'(x) = f(x), \text{ για καθε } x \in \Delta$$

A4

α -> ΛΑΘΟΣ

β -> ΣΩΣΤΟ

γ -> ΣΩΣΤΟ

δ -> ΣΩΣΤΟ

ε -> ΛΑΘΟΣ

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Β}}$

$f(x) = 2\ln(x-1)$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{x-2} + 1$

Β1 $\quad D_f = (1, +\infty)$ $\qquad$ $D_g = [2, +\infty)$

πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x \in [2, +\infty)$ $\qquad$ $\sqrt{x-2} + 1 \in (1, +\infty)$

$\sqrt{x-2} + 1 > 1$

$\sqrt{x-2} > 0$

$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

άρα $\boxed{D_{f\circ g} = (2, +\infty)}$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2\ln(g(x) - 1) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1)$

$(f\circ g)(x) = 2\ln\sqrt{x-2} = 2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}} =$

$2\,\frac{1}{2}\ln(x-2).$

άρα $\boxed{(f\circ g)(x) = \ln(x-2), \text{ για } x > 2}$

Β2 $\quad$ έχω $h(x) = \ln(x-2), \quad x > 2$

$h'(x) = (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2} > 0 \quad \forall x > 2$

έτσι $h \nearrow$ άρα h 1-1 επομένως υπάρχει h^{-1}

$D_{h^{-1}} = \Sigma T_h = h\left((2,+\infty)\right) \overset{h \nearrow}{=\!=} \left(\lim_{x\to 2^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = \boxed{\mathbb{R}}$

αφού

- $\lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) \xrightarrow[u_0=0]{u=x-2} \lim_{u\to 0} \ln u = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \ln(x-2) \xrightarrow[u_0=+\infty]{u=x-2} \lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$

Ισχύει $\quad h(x) = y \iff x = h^{-1}(y)$

Έτσι $\quad h(x) = y, \quad$ με $y \in \mathbb{R}$

$$\ln(x-2) = y$$

$$x-2 = e^y$$

$$x = e^y + 2, \quad y \in \mathbb{R}$$

Επομένως $\boxed{h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}}$

B3)

- $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \underset{DL'H}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} =$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\,\frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2} h(x) \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x-2} = (-\infty)\cdot 2 = \boxed{-\infty}$$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Γ}}$

Γ1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$

➔ Αφού f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R}$

Αν $\kappa\neq 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2}=\kappa(+\infty)=\pm\infty\notin\mathbb{R}$ άτοπο

πρέπει $\boxed{\kappa=0}$ έτσι $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$

έχουμε $f'(x)=\left(\dfrac{\mu x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{\mu(x^2+1)-\mu x(2x)}{(x^2+1)^2}=$

$=\dfrac{\mu x^2+\mu-2\mu x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-\mu x^2+\mu}{(x^2+1)^2}$

➔ Αφού $y=x$ εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$

πρέπει $f'(0)=1 \Rightarrow \dfrac{\mu}{1}=1\Rightarrow \boxed{\mu=1}$

Γ2) Έχουμε $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

i) $f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\,2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0 \iff 1-x^2=0 \iff x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

• $x\in(-\infty,-1]$ ή $x\in[1,+\infty)$ $f \searrow$

$x\in[-1,1]$ $f \nearrow$

• στο $x_1=-1$ ολ. ελάχιστο $f(-1)=-\frac{1}{2}$

στο $x_2=1$ ολ. μέγιστο $f(1)=\frac{1}{2}$

ii) έστω $\Delta_1=(-\infty,-1]$, $\Delta_2=(-1,1]$, $\Delta_3=(1,+\infty)$

• $f(\Delta_1)=f((-\infty,-1])\overset{f\searrow}{=}[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x))=[-\frac{1}{2},0)$

• $f(\Delta_2)=f((-1,1])\overset{f\nearrow}{=}(\lim\limits_{x\to-1^+}f(x),f(1)]=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$f(\Delta_3)=f((1,+\infty))\overset{f\searrow}{=}(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x))=(0,\frac{1}{2})$

Άρα $Σ.Τ.f = f(Δ_1) \cup f(Δ_2) \cup f(Δ_3) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

iii) Εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + α^2$, $α \in \mathbb{R}$

αφού $α \in \mathbb{R}$ ισχύει $α^2 \geq 0 \Rightarrow α^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

- $α^2 + \frac{1}{2} \notin f(Δ_1)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ ΕΧΕΙ ρίζα στο $Δ_1$.

- $α^2 + \frac{1}{2} \in f(Δ_2)$ (για $α = 0$) άρα η εξίσωση έχει 1 μόνο ρίζα στο $Δ_2$ την $x = 1$ (αφού $f \nearrow$ στο $Δ_2$)
- $α^2 + \frac{1}{2} \notin f(Δ_3)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ ΕΧΕΙ ρίζα στο $Δ_3$

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + α^2$ έχει 1 ΜΟΝΟ ρίζα την $x = 1$.

$\underline{Γ3}$ $I_ν = \int_0^1 \frac{x^{2ν+1}}{x^2+1} dx$

i) $I_ν + I_{ν+1} = \int_0^1 \frac{x^{2ν+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(ν+1)+1}}{x^2+1} dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{2ν+1} + x^{2ν+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2ν+1}\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{x^2+1}} dx$

$$\int_0^1 x^{2\nu+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}} \quad (1)$$

ii) • $I_0 \overset{\nu=0}{=\!=} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \overset{u=x^2+1}{\underset{du=2xdx}{=\!=\!=}} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{u}du$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|u|\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$$

• $(1) \xrightarrow{\nu=0} I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\ln 2 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}}$$

• $(1) \xrightarrow{\nu=1} I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1-\ln 2}{2} \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{1-2+2\ln 2}{4}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{2\ln 2 - 1}{4}}$$

ΘΕΜΑ Δ

g παραγωγίσιμη, g' συνεχής

$0 < g(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Δ1. Θεωρώ $h(x) = g(x) + x$

η h συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών

$$\left.\begin{array}{l} h(-1) = g(-1) - 1 < 0 \\ h(0) = g(0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(-1)\,h(0) < 0$$

Άρα ο Bolzano $\exists\, x_1 \in (-1, 0)$ $h(x_1) = 0 \Rightarrow$

$$g(x_1) + x_1 = 0$$

(*) $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και συνεχής

Άρα η h' διατηρεί πρόσημο

Άρα η h γνησίως μονότονη,

Επομένως η ρίζα είναι μοναδική

Δ2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,(g(x)+x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \left(x \cdot (g(x) + x)\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\eta\mu + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[2\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right)\right] =$$

$$= 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Άρα $3 - \kappa = 0 \Rightarrow \kappa = 3.$

Δ3 $\quad f(x) = 2ημx + εφx - 3x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2})$

(i) $f'(x) = 2συνx + \dfrac{1}{συν^2x} - 3 = \dfrac{2συν^3x - 3συν^2x + 1}{συν^2x} =$

$$= \frac{2συν^2x\,(συνx - 1) + (1 - συνx)(1 + συνx)}{συν^2x}$$

$$= \frac{(1 - συνx)(-2συν^2x + συνx + 1)}{συν^2x}$$

$$= \frac{-2\overset{+}{(1 - συνx)}\,\overset{-}{(συνx - 2)}\,\overset{+}{(συνx + 1)}}{συν^2x} > 0 \quad \forall x \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

f' f συνεχής στο 0

οπότε $f \nearrow$ στο $[0, \frac{\pi}{2})$ $\Rightarrow$

για $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$

(ii) $f([0, \frac{\pi}{2})) \underset{συνεχής}{\overset{\nearrow}{=}} [f(0), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x))$

$= [0, +\infty)$

Το $\frac{\pi}{3} \in f([0, \frac{\pi}{2}))$

Άρα $\exists\, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2}) : f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ μοναδικό

αφού $f \nearrow$

Δ4 (ι) Θεωρώ $h(x)=g(x)+x$

Τότε $h(0)=g(0)>0$

$h(x_1)=g(x_1)+x_1=0$

και $h'(x)=g'(x)+1\neq 0$ και άρα h' συνεχής

Άρα η $h'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο

Αν $h'(x)<0 \Rightarrow h\downarrow$ οπότε

έχω $x_1<0 \overset{h\downarrow}{\Rightarrow} h(x_1)>h(0)=g(0)>0$ ή

$0>0$ άτοπο

Άρα $h'(x)>0 \Rightarrow h\uparrow$ οπότε

για $x\in[x_1,0]$ έχω $x\geq x_1 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow}$

$h(x)\geq h(x_1)=0 \Rightarrow g(x)+x\geq 0$

και αφού $x^2>0$ έχω

$x^2(g(x)+x)\geq 0$ στο $[x_1,0] \Rightarrow$

$f(x)\geq 0$ στο $[x_1,0]$

Δ4 (i.i)

Έχω $E(0) = \int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)|\,dx$

με $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ και $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [x_1, \frac{\pi}{3}]$

Άρα $E(0) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

και ισχύει $\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ ①

Έχω $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \left[x^3 g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)\,dx$

$= -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^{0} 3\,(f(x) - x^3)\,dx =$

$= x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} 3x^3\,dx$

$= x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx + 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}$

$= x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx - 3\,\frac{x_1^4}{4}$

$= \frac{x_1^4}{4} - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx \stackrel{①}{=}$

$\frac{x_1^4}{4} - 3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$

Έχω $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx$

$= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= -2\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2$

$= 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$

Άρα $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} - 3\left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}\right)$

$= \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$